1

Η ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΟΞΟΥ

Τα παράδοξα μπορούν να είναι διασκεδαστικά. Μπορούν όμως να είναι και διδακτικά, καθώς η διαλεύκανση ενός παραδόξου είναι δυνατόν να μας οδηγήσει σε πληρέστερη φιλοσοφική γνώση και κατανόηση. Τα παράδοξα που εξετάζονται σε αυτό το βιβλίο προσφέρονται για την προβολή και των δύο αυτών χαρακτηριστικών. Ωστόσο, τα παράδοξα μπορούν επίσης να κλονίσουν. Η μελέτη τους είναι δυνατόν να αναδείξει ανακρίβειες, σύγχυση ή έλλειψη συνεκτικότητας σε μερικές από τις βαθύτερα περιχαρακωμένες αρχές και πεποιθήσεις μας. Προαναγγέλλεται στους αναγνώστες: μέρος του υλικού που ακολουθεί μπορεί να προκαλέσει διανοητική ανησυχία.

Είναι συνετό να ξεκινήσει κανείς με τα εξής δύο πρωταρχικά ερωτήματα: «Τι είναι ένα παράδοξο;» και «Πώς επιλύεται ένα παράδοξο;». Κατ' αρχάς όμως είναι αναγκαία κάποια παραδείγματα παραδόξων.

ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ MONTY HALL

Έστω ότι προσκαλείστε να διαγωνιστείτε σε ένα υπέροχο τηλεπαιχνίδι. Ο παρουσιαστής του παιχνιδιού, ο Monty Hall, σας εξηγεί τους κανόνες του. Μετά από μια αρχική κουβεντούλα, θα σας παρουσιάσει τρεις πόρτες, *Α*, *Β* και *Γ*. Η μία από αυτές θα κρύβει το αυτοκίνητο των ονείρων σας – μια Πόρσε, μια Τζάγκουαρ ή οτιδήποτε εσείς επιθυμείτε. Πίσω από καθεμία από τις άλλες δύο πόρτες θα βρίσκεται μια κατσίκα. Η επιλογή της πόρτας που θα κρύβει το αυτοκίνητο αποφασίζεται τυχαία. Αρχικά θα σας ζητηθεί να επιλέξετε μία πόρτα. Στη συνέχεια ο Monty, που γνωρίζει τι βρίσκεται πίσω από κάθε πόρτα, θα επιλέξει, από τις υπόλοιπες δύο, μια πόρτα που κρύβει κατσίκα και θα την ανοίξει για να σας δείξει το ζώο.

Στο σημείο αυτό, θα σας προσφερθεί μια δεύτερη επιλογή. Είτε μπορείτε να παραμείνετε στην αρχική σας επιλογή και να κερδίσετε αυτό που κρύβεται πίσω από την πόρτα που αρχικά επιλέξατε· είτε μπορείτε να ανταλλάξετε την αρχική πόρτα με μια άλλη κερδίζοντας αυτό που βρίσκεται πίσω της.

Όπως είναι φυσικό, αποδέχεστε την πρόσκληση με χαρά. Μία εβδομάδα πριν από την εκπομπή, αισθάνεσθε ότι το μόνο που έχετε να σκεφτείτε είναι τι ρούχα θα φορέσετε. Απ' ό,τι φαίνεται, τα πάντα είναι θέμα τύχης. Η πρώτη επιλογή είναι εντελώς αυθαίρετη. Είναι εξίσου πιθανό το αυτοκίνητο να βρίσκεται πίσω από οποιαδήποτε από τις τρεις πόρτες, δηλαδή η πιθανότητα το αυτοκίνητο να βρίσκεται πίσω από κάποια πόρτα είναι $^1/_3$. Το ίδιο συμβαίνει και με τη δεύτερη επιλογή. Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να προτιμήσετε είτε ανταλλαγή με άλλη πόρτα είτε να εμμείνετε στην αρχική επιλογή σας. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι αρχικά επιλέγετε την πόρτα *Α*, και ο Monty σας δείχνει την κατσίκα πίσω από την πόρτα *Γ*. Αυτό σημαίνει ότι το αυτοκίνητο βρίσκεται είτε πίσω από την πόρτα *Α* είτε πίσω από την πόρτα *Β*. Αλλά είναι εξίσου πιθανό να βρίσκεται πίσω από οποιαδήποτε από τις δύο πόρτες. Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να προτιμήσετε τη μία έναντι της άλλης. Έτσι, η πιθανότητα να βρίσκεται το αυτοκίνητο πίσω από οποιαδήποτε από τις δύο πόρτες είναι τώρα $^1/_2$ και δεν υπάρχει κάποιο κέρδος είτε με ανταλλαγή είτε χωρίς ανταλλαγή.

Πιστεύετε ότι είναι καθαρά θέμα κοινής λογικής. Πώς θα μπορούσε η ένδειξη της κατσίκας σε μια από τις πόρτες που δεν επιλέξατε αρχικά να συνιστά κάποιο λόγο προτίμησης μεταξύ των υπόλοιπων δύο πορτών;

Την παραμονή της τηλεοπτικής σας εμφάνισης, ένας φίλος σας μαθηματικός χτυπάει το κουδούνι σας εμφανώς αναστατωμένος. «Στην πρώτη επιλογή, διάλεξε όποια πόρτα θες», σας λέει. «Αλλά στη δεύτερη, *πρέπει* να ανταλλάξεις! Μόλις το συνειδητοποίησα». «Δες το από την ακόλουθη οπτική», συνεχίζει· «έστω ότι στον πρώτο γύρο επιλέγεις την πόρτα *Α* και ο Monty σου δείχνει ότι πίσω από την πόρτα *Γ* ήταν μια κατσίκα. Ο Monty έπρεπε να διαλέξει μεταξύ των *Β* και *Γ* και, επιπλέον, έπρεπε να διαλέξει μια πόρτα που έκρυβε κατσίκα. Μπορεί να ήταν στη θέση όπου μπορούσε να διαλέξει είτε τη μία είτε την άλλη πόρτα (καθώς και οι δύο πόρτες έκρυβαν κατσίκα). Ή απλώς *έπρεπε* να διαλέξει την πόρτα *Γ*. Αρχικά, η πιθανότητα το αυτοκίνητο να βρισκόταν είτε πίσω από την πόρτα *B* είτε πίσω από την πόρτα *Γ* ήταν $^2/_3$. Έτσι, η πιθανότητα η επιλογή του (δηλαδή της *Γ*) να ήταν *αναγκαία* ήταν $^2/_3$. Η επιλογή του όμως θα ήταν αναγκαία μόνον αν το αυτοκίνητο βρισκόταν πίσω από τη *B*. Έτσι, αν εσύ μεταβάλεις την επιλογή σου σε *B*, η πιθανότητα να κερδίσεις είναι $^2/_3$. Δεν υπάρχει τίποτα καλύτερο που μπορείς να κάνεις».

Πανικόβλητος αρχίζετε να διαμαρτύρεστε, αλλά σας διακόπτει: «Θα το θέσω αλλιώς. Ας υποθέσουμε ότι θα έπαιζες το παιχνίδι πολλές φορές και έτσι θα είχες τη δυνατότητα να διαμορφώσεις μια συγκεκριμένη στρατηγική. Αν επέλεγες σταθερά μία συγκεκριμένη πόρτα (ας πούμε την πόρτα *A*) και επέμενες σε αυτή την επιλογή χωρίς ανταλλαγή, θα κέρδιζες στο $^1/_3$ των περιπτώσεων που θα έπαιζες (η πόρτα με το αυτοκίνητο καθορίζεται τυχαία). Όμως, στα $^2/_3$ των περιπτώσεων το αυτοκίνητο θα βρισκόταν είτε πίσω από την πόρτα *B* είτε πίσω από την πόρτα *Γ*, και στην προκειμένη περίπτωση ο Monty κάθε φορά όντως θα σου έδειχνε την πόρτα εκείνη που δεν κρύβει το αυτοκίνητο. Έτσι, αν ακολουθούσες τη στρατηγική να αλλάζεις την αρχική σου επιλογή, θα κέρδιζες τα $^2/_3$ των φορών που θα έπαιζες, δύο φορές περισσότερο απ' ό,τι αν η στρατηγική σου ήταν να μην αλλάζεις την αρχική σου επιλογή».

Τι πρέπει να κάνετε;

ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ

Το παράδοξο του κουρέα

Φανταστείτε ένα γραφικό χωριό, ανέγγιχτο ακόμα από τον τουρισμό, στο οποίο υπάρχει ένας μόνο κουρέας. Έχει πολλή δουλειά, καθώς κόβει τα μαλλιά όλων και μόνον εκείνων των χωρικών που δεν κόβουν οι ίδιοι τα μαλλιά τους. Τότε όμως, μπορεί να αναρωτηθούμε, ποιος κόβει τα μαλλιά του ίδιου του κουρέα; Έστω ότι κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του. Αν το κάνει, τότε, αφού είναι και ο ίδιος χωρικός, δεν κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του. Αν υποθέσουμε, από την άλλη, ότι δεν κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του, τότε, αφού είναι και ο ίδιος χωρικός, έπεται ότι κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του. Επομένως, ο κουρέας αυτού του χωριού κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του εάν και μόνον εάν δεν κόβει ο ίδιος τα μαλλιά του.

Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας

Η χελώνα και ο Αχιλλέας πρόκειται να διαγωνιστούν στο τρέξιμο. Φυσικά, η χελώνα είναι πολύ πιο αργή από τον Αχιλλέα. Ο Αχιλλέας μπορεί να τρέξει δέκα φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Για να αποκτήσει ενδιαφέρον ο αγώνας, η χελώνα ξεκινά με προβάδισμα 10 μέτρων. Πρόκειται να διανύσουν 100 μέτρα. Μπορεί ο Αχιλλέας να ξεπεράσει τη χελώνα; Σκεφτείτε. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο εκκίνησης της χελώνας (το σημείο 1, που βρίσκεται 10 μέτρα πιο μπροστά από το σημείο εκκίνησης του Αχιλλέα), η χελώνα θα έχει διανύσει άλλο ένα μέτρο και θα έχει φτάσει στο σημείο 2 (αφού ο Αχιλλέας τρέχει δέκα φορές γρηγορότερα από τη χελώνα). Όταν όμως ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο 2, η χελώνα θα έχει διανύσει άλλο ένα δέκατο του μέτρου και θα έχει φτάσει στο σημείο 3. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει και στο σημείο 3, η χελώνα θα εξακολουθεί να βρίσκεται ένα εκατοστό του μέτρου πιο μπροστά από εκείνον, στο σημείο 4. Και ούτω καθεξής. Φαίνεται ότι, κάθε φορά που ο Αχιλλέας φτάνει στο σημείο όπου *βρισκόταν* η χελώνα, η χελώνα προπορεύεται κατά ένα ελάχιστο διάστημα από τον Αχιλλέα. Συνεπώς, ο Αχιλλέας δεν μπορεί να ξεπεράσει τη χελώνα και να νικήσει στον αγώνα.

Το παράδοξο του καραβιού του Θησέα

Ο Θησέας, έμπειρος ναυτικός που γνωρίζει τους κινδύνους της θάλασσας, έχει ένα καράβι και αποφασίζει ότι χρειάζεται πλήρη ανακαίνιση. Το καράβι –ας το ονομάσουμε *Κ*– αποτελείται από 1.000 παλιές σανίδες. Όταν αρχίζει η ανακαίνιση, το καράβι του Θησέα τοποθετείται στην αποβάθρα *Α*. Το πλήρωμα έχει οδηγίες να ακολουθήσει την εξής διαδικασία: την πρώτη ώρα της ανακαίνισης πρέπει να αφαιρέσουν μία σανίδα από το *Κ*, να την αντικαταστήσουν με μια καινούρια και να μεταφέρουν την παλιά σανίδα στην αποβάθρα *Β*. Τη δεύτερη ώρα της ανακαίνισης πρέπει να αφαιρέσουν μια εφαπτόμενη –σε αυτήν που είχαν αφαιρέσει– σανίδα, να την αντικαταστήσουν με μια καινούρια και να μεταφέρουν την παλιά στην αποβάθρα *Β*, όπου και πρέπει να την στερεώσουν σε αυτήν που είχαν αφαιρέσει την πρώτη ώρα. Την τρίτη ώρα πρέπει να αφαιρέσουν μια τρίτη σανίδα, και ούτω καθεξής. Μετά από 1.000 ώρες, στην αποβάθρα *Α* έχει συναρμολογηθεί ένα καράβι, ας το ονομάσουμε *Χ*, το οποίο αποτελείται από 1.000 καινούριες σανίδες. Επίσης, στην αποβάθρα *B* υπάρχει άλλο ένα καράβι –ας το ονομάσουμε *Y*– το οποίο αποτελείται από τις 1.000 παλιές σανίδες που έχουν αφαιρεθεί από το καράβι του Θησέα και μετά επανασυναρμολογήθηκαν όπως ακριβώς ήταν συναρμολογημένες πριν από την ανακαίνιση. Ποιο καράβι είναι το καράβι του Θησέα, επομένως; Ποιο από τα δύο είναι το *K*;

Αν αποσυναρμολογούσατε μεθοδικά το καράβι και μετά το επανασυναρμολογούσατε ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, είναι βέβαιο ότι θα λέγατε πως πρόκειται για το ίδιο καράβι.[1] Αλλά αυτό ακριβώς συνέβη και εδώ. Το *K* αρχικά αποσυναρμολογήθηκε, μετά επανασυναρμολογήθηκε και τώρα βρίσκεται στην αποβάθρα *B*. Το *Y* λοιπόν είναι το *K*. Επιπλέον, το *Y* κατασκευάστηκε από τα ίδια ακριβώς υλικά, τοποθετημένα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως ήταν το *K* όταν ο Θησέας το έφερε στο λιμάνι.

Από την άλλη, αν αφαιρέσετε μία σανίδα από κάποιο καράβι και την αντικαταστήσετε με μια καινούρια, το καράβι εξακολουθεί να είναι το ίδιο. Μια τόσο ανεπαίσθητη αλλαγή δεν μπορεί να επηρεάσει την ταυτότητα του αντικειμένου. Έτσι, μετά από μία ώρα, το καράβι στην αποβάθρα *A* είναι το *K*. Και πάλι, η αφαίρεση μιας επιπλέον σανίδας και η αντικατάστασή της με άλλη δεν επηρεάζει την ταυτότητα του καραβιού. Έτσι, μετά από δύο ώρες, το καράβι στην αποβάθρα *A* εξακολουθεί να είναι το *K*. Και ούτω καθεξής. Τελικά, μετά από 1.000 ώρες, το καράβι στην αποβάθρα *A* είναι το *K*. Επομένως, το *X* πρέπει να είναι το *K*.

Το παράδοξο του ταξί

Στην πόλη Γκρίνβιλ υπάρχουν ακριβώς 100 ταξί, από τα οποία 85 έχουν πράσινο και 15 μπλε χρώμα. Ένας εξέχων πολίτης γίνεται μάρτυρας ενός ατυχήματος στο οποίο εμπλέκεται ένα ταξί και καταθέτει ότι το ταξί ήταν χρώματος μπλε. Ο πολίτης αυτός υποβάλλεται σε τεστ μέσα από τα οποία εξακριβώνεται ότι, σε παρόμοιες περιπτώσεις, η αξιοπιστία του στη μαρτυρία για το χρώμα είναι 80%. Είναι λοιπόν πιθανό το ταξί που ενεπλάκη στο ατύχημα να ήταν μπλε;

Κατ' αρχάς, πρέπει να αποδεχθούμε ότι υπάρχει υψηλή πιθανότητα αυτό που ισχυρίζεται ο μάρτυρας να είναι αληθές. Εφόσον όταν υποβλήθηκε σε παρόμοια τεστ αποδείχθηκε κατά 80% αξιόπιστος, δεν υπάρχει λόγος να πιστεύουμε ότι η συγκεκριμένη περίπτωση είναι πολύ διαφορετική. Είναι βέβαιο ότι ο ισχυρισμός του μπορεί να θεωρηθεί βάσιμος και ένα δικαστήριο σίγουρα θα τον εκλάβει ως τέτοιο.

Μια αναλυτικότερη εξέταση του θέματος, όμως, καταδεικνύει πως είναι απίθανο ο μάρτυρας να είχε δίκιο στην αναγνώριση του χρώματος. Πιο συγκεκριμένα, θεωρήστε 100 τυχαίως επιλεγμένα ατυχήματα με ταξί στο Γκρίνβιλ. Σε περίπου 85 από αυτά θα συμμετείχε ένα πράσινο και σε περίπου 15 ένα μπλε ταξί. Αν ο συγκεκριμένος μάρτυρας κατέθετε για τα 85 εκείνα ατυχήματα που αφορούσαν πράσινο ταξί, θα είχε 80% πιθανότητα να έχει δίκιο και 20% πιθανότητα να έχει άδικο. Αυτό σημαίνει ότι από τα 85 ατυχήματα με πράσινο ταξί, εκείνος θα κατέθετε λανθασμένα ότι 17 από αυτά έγιναν με μπλε ταξί. Αντίστοιχα, στα 15 ατυχήματα με μπλε ταξί το ποσοστό ακριβούς κατάθεσης θα ήταν 80%, δηλαδή θα ισχυριζόταν ότι 12 ατυχήματα αφορούσαν μπλε ταξί. Αν λοιπόν ένας μάρτυρας με 80% αξιοπιστία καλούνταν να δώσει κατάθεση για 100 ατυχήματα στα οποία συμμετείχαν ταξί στο Γκρίνβιλ, τότε θα μαρτυρούσε για περίπου 29 μπλε ταξί (=17+12), από τα οποία μόνο τα 12 θα ανταποκρίνονταν στην πραγματικότητα, δηλαδή, μόνο το 41% από τις καταθέσεις για μπλε ταξί θα ήταν ορθό. Έτσι, φαίνεται πιο πιθανό παρά όχι ο μάρτυρας στην αρχική περίπτωση που εξετάσαμε να έκανε λάθος όταν στην κατάθεσή του ισχυρίστηκε ότι ένα μπλε ταξί συμμετείχε στο δυστύχημα.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΟΞΟ;

Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε γιατί αυτές οι ιστορίες μάς προκαλούν απορία και σύγχυση αλλά ταυτόχρονα μας συναρπάζουν, είναι αναγκαίο να αποκτήσουμε καλύτερη κατανόηση του είδους του προβλήματος που θέτουν. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω παράδοξα ως υπόβαθρο, ας εξετάσουμε το ερώτημα: τι είναι ένα παράδοξο;

Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό αυτών των προβλημάτων είναι ότι παρουσιάζουν μια σύγκρουση συλλογισμών. Μολονότι υπάρχει στο καθένα από αυτά μια φαινομενικά άψογη χρήση της λογικής η οποία υποδεικνύει ότι μια συγκεκριμένη πρόταση είναι αληθής, ένας άλλος συλλογισμός μάς υπαγορεύει ότι αυτή η ίδια πρόταση είναι απολύτως παράλογη. Απ' ό,τι φαίνεται, οι κατά γράμμα λειτουργίες του λόγου καταλήγουν σε μια πρόταση την οποία η λογική φαίνεται πως είναι υποχρεωμένη να απορρίψει.

Ας αποκαλύψουμε όμως τι σημαίνει αυτό. Αρχικά πρέπει να επιση-